Ecole Doctorale STIC

Sciences & Technologies de l'Information et de la Communication

MINES ParisTech

Université Nice SOPHIA ANTIPOLIS

ED STIC - Proposition de Sujets de Thèse

pour la campagne d'Allocation de thèses 2011

Titre du sujet :	Partitions de graphes orientés
Mention de thèse :	Informatique
HDR Directeur de thèse inscrit à l'ED STIC :	Havet Frederic

Co-encadrant de thèse éventuel :

Nom :	
Prénom :	
Email :	
Téléphone :	

Email de contact pour ce sujet :	Frederic.Havet@inria.fr
Laboratoire d'accueil :	I3S/INRIA

Description du sujet :

Les graphes sont communément utilisés comme modèles et outils dans de nombreux domaines des Mathématiques et de l'Informatique. Un des principaux enjeus concernant les graphes consiste à capturer la complexité de leur structure par l'intermédiaire de décompositions. Une des manières les plus simples de faire consiste à partitionner l'ensemble des sommets du graphe suivant certaines contraintes. Par exemple, si l'on force que chacune des parties soit un ensemble stable, on obtient une coloration propre du graphe. Une autre facon de partitionner le graphe est de maximiser ou minimiser le nombre d'arêtes entre les différentes parties (problèmes MaxCut et MinCut). Des méthodes exactes et des heuristiques existent pour résoudre de telles questions: la théorie de la "discrepancy", les flots, la programmation semi-définie positive, ou des arguments probabilistes... Cependant, il apparait que dès lors que des graphes orientés (ou digraphes) sont considérés, les problèmes de partitions deviennent beaucoup plus durs et très souvent toutes ces méthodes s'avèrent inopérantes.

L'objectif de cette thèse est d'étudier quelques questions ouvertes portant sur les partitions des

graphes orientés, dans le but d'essayer de développer de nouvelles méthodes.
Nous nous concentrerons tout d'abord sur un problème naturel et fondamental, qui est relié à l'un des invariants les plus simples d'un graphe orienté, son degré entrant minimum.
Ce problème du à Stiebitz et popularisé par Alon est le suivant:
Existe-t-il une fonction f telle que tout digraphe de degré entrant minimum f(k) admette une partition de son ensemble de sommets en deux ensembles induisant des digraphes de degré entrant minimum au moins k? Malgré sa simplicité, et alors que son analogue non-orienté est une application simple du Lemme Local, quasiment rien n'est connu sur ce problème et même l'existence de f(2) n'est pas prouvée (ou infirmée). Montrer que f(2) est au plus 100 milliards serait déjà une avancée importante car aucune méthode ne semble fonctionner. Un objectif plus raisonnable serait de prouver l'existence d'une telle fonction pour certaines classes de graphe orienté.
De conjectures voisines seront également considérées. Par exemple, Bang-Jensen et Thomassé ont proposé une conjecture similaire suivante: Tout digraphe fortement connexe de degré entrant minimum 3 et degré sortant minimum 3 admet une partition en un sous-digraphes de degré minimum entrant 1 et un sous-graphe de degré minimum sortant 1.
Une autre question est due à Birmelé et Thomassé. existe-t-il c>0 tel que tout digraphe ait une partition en deux sous-digraphes dans lesquels le degré sortant de chaque sommet est au moins c fois le degré sortant dans le digraphe initial.

English version:

Graphs are widely used both as models and tools in many fields of mathematics and computer science. One of the main issue concerning graphs is to catch the complexity of their structure via some decompositions. One of the simplest way of doing so is simply to partition the set of vertices under some constraints. For instance, one can insist that the parts are stable sets, yielding a proper colouring of the graph. Another way of partitionning the graph is to maximize or to minimize the number of crossing edges (MaxCut and MinCut problems). Exact methods and heuristics are available for these questions like discrepancy theory, network flows, semi-definite programming, probabilistic arguments, ... However, it turns out that as soon as orientations of graphs are involved, vertex-partition problems become much harder. And often, no existing tools seems to work.
The aim of this thesis is to investigate some open questions regarding vertex-partitions of oriented graphs, in order to try to develop new methods.
We will focus to a natural fundamental problem, which is related to one of the easiest directed graph invariant, the minimum outdegree. This problem due to M. Stiebitz, and popularized by N. Alon, is the following:
Is there a function f such that every digraph with minimum outdegree f(k) has a vertex-partition into two digraphs, each of them with minimum outdegree k? Despite its simplicity, and while its analog for undirected graphs is a simple application of the Local Lemma, incredibly little is known on this question since even the existence of f(2) is unknown. Even proving (or disproving!) that f(2) is at most one trillion would be an achievement since no method seems to give it. A more reasonable objective is to prove the existence of such a function for some classes of digraph.
Some closely related conjectures will also be considered. For example, Bang-Jensen and Thomassé made the following similar conjecture involving both the indegree and the outdegree:

Every strong digraph with minimum out and in degree 3 has a vertex partition into one subset with minimum outdegree 1 and one subset with minimum indegree 1.

Another possible extension of the above conjecture is the following problem posed by Birmelé and Thomassé: Does there exists a c> 0 such that every digraph D has a partition into two induced digraphs in which the outdegree of every vertex in its subgraph is at least c times its outdegree in the original graph.