Ecole Doctorale STIC

Sciences & Technologies de l'Information et de la Communication

ED STIC - Proposition de Sujets de Thèse

pour la campagne d'Allocation de thèses 2011

Titre du sujet :	Jeux de capture dans les graphes
Mention de thèse :	Informatique
HDR Directeur de thèse inscrit à l'ED STIC :	Perennes Stéphane

Co-encadrant de thèse éventuel :

Nom :	NISSE
Prénom :	Nicolas
Email :	nicolas.nisse@inria.fr
Téléphone :	+33 (0)4 97 15 53 28

Email de contact pour ce sujet :	nicolas.nisse@inria.fr
Laboratoire d'accueil :	I3S/INRIA

Description du sujet :

Le jeu des gendarmes et du voleur dans les graphes a beaucoup été étudié (cf. le survey [Alspach04]) pour donner de nouvelles caractérisations structurelles des graphes ainsi que de nouveaux outils algorithmiques pour étudier les graphes.

Dans ce jeu, un joueur commence par placer un ensemble d'agents (les gendarmes) sur des sommets du graphe G. Ensuite, le second joueur place son agent (le voleur) sur un sommet de G. A tour de rôle (en commençant par les gendarmes), les joueurs déplacent leurs agents de leur position courante à un sommet adjacent. Une stratégie pour les gendarmes est un algorithme (déterministe) qui définit les mouvements des gendarmes en fonction de leurs positions courantes ainsi que de celle du voleur. Le but des gendarmes est de capturer le voleur (un gendarme doit occuper le même sommet que le voleur) et celui du voleur est de s'échapper éternellement. Étant donné un graphe, la question est de déterminer le plus petit nombre de gendarmes tel qu'il existe une stratégie utilisant ce nombre de gendarmes pour capturer le voleur quelle que soit sa stratégie (suite de mouvements). Il s'agit également de calculer la stratégie de capture correspondante. Par exemple, si le nombre de gendarmes égale le nombre de sommets du graphe, le voleur est immédiatement capturé. Dans une grille, deux gendarmes sont suffisants pour capturer un voleur (vous pouvez essayer).

Le cas des graphes aléatoires a aussi été étudié [BPW09,Pralat10,LP]. De nombreuses questions restent ouvertes dans ce contexte. La principale question ouverte (depuis 30 ans) est de savoir si racine(n) gendarmes sont toujours suffisant pour capturer un voleur dans un graphe à n sommets. Au cours des 5 dernières années, plusieurs variantes de ce jeu ont été étudiées [CCNV,FGK08,NS08]: par exemple, lorsque le voleur est plus rapide que les gendarmes ou lorsque les gendarmes peuvent capturer le voleur à une certaine distance. Ces études ont amené à de nouvelles caractérisations de paramètres connus des graphes comme par exemple l'hyperbolicité. Ces jeux sont également étroitement liés aux décompositions de graphes (treewidth,pathwidth...) qui ont d'importantes implications algorithmiques et dans le cadre de la théorie de la complexité paramétrée.

Nous nous concentrerons tout d'abord sur l'étude de ces variantes du jeu dans le cas des graphes aléatoires et dans des classes de graphes particulières. Il s'agit de déterminer des bornes inférieures ou supérieures, voire la valeur exacte, du nombre de gendarmes suffisant pour capturer le voleur dans ces classes (par exemple, combien faut il de gendarmes pour capturer un voleur plus rapide dans une grille ? [NS08]), de caractériser les graphes pour lesquelles un gendarme suffit à capturer à distance un voleur, d'établir ou de raffiner les relations entre ces jeux et d'autres paramètres des graphes (genre, hyperbolicité, largeur arborescente...). Presque rien n'est connu quant à la conception d'algorithmes, déterministes ou non, permettant au voleur de s'échapper face à peu de gendarmes.

Connaissances requises : bonnes connaissances en probabilité, théorie des graphes, algorithmique, optimisation combinatoire et théorie de la complexité.

References:
[Alspach04] Brian Alspach, Searching and sweeping graphs: A brief survey. Le Matematiche LIX, pages 5-37, 2004.
http://www.dmi.unict.it/ gquattro/combinatorics04/documenti%20pdf/alspach.pdf
[CCNV] J. Chalopin, V. Chepoi, N. Nisse and Y. Vaxes, Cop and Robber games when the robber can hide and ride
[FGK08] F. V. Fomin, P. Golovach and J. Kratochvil, On tractability of Cops and Robbers game, IFIP TCS, pages 171-185, 2008
[NS08] N. Nisse and K. Suchan, Fast robber in planar graphs, WG, pages 312-323, 2008
[Pralat10] Pawel Pralat, When does a random graph have constant cop number ? Australian Journal of Combinatorics 46. (2010)
[LP] T. Luczak and P. Pralat, Chasing robbers on random graphs: zigzag theorem (see www.math.wvu.edu/ pralat/)
[BPW09] A. Bonato, P. Pralat and C. Wang, Pursuit-evasion in models of Complex Networks,

Internet Mathematics 4, pages 419-436, 2009.

URL : http://www-sop.inria.fr/mascotte//offres/CopsRobber.pdf

English version:

Cops and robber game is a combinatorical problem that has been studied for providing new structural tools and characterization of graphs (see the survey of B.Alspach [Alspach04]). In this game, one player first places a set of tokens (the cops) on the vertices of a graph G, then the second player places its token (the robber) on a vertex of G. Alternatively (starting with the cops), the players moves their token from their current location to an adjacent vertex. The goal of the cops is to capture the robber (a cop must be placed on the same vertex as the robber), while the robber wants to permanently escape. Given a graph, a question is to determine the smallest number of cops that ensures the existance of a strategy (sequence of moves) that capture the robber whatever it does. For instance, if the number of cops equals the number
of vertices of G, the robber will immediatly be captured. On a grid, two cops are sufficient (you can try). A corresponding problem is to design efficient algorithms (strategies) allowing either to capture the robber using the optimal number of cops, or the evasion of the robber facing few cops. One of the main (difficult) remaining challenge in this area consists in determining whether square-root(n) cops are always sufficient to capture a robber in any n-node graph.

During recent years, some variants of this game has been considered [CCNV,FGK08,NS08]: for instance, the study of the game when the robber is faster than the cops, when the cops can ”shoot” the robber (if they can capture it when occupying a vertex at some distance k > 0 from the location of the robber). The case of random graphs has also been widely studied recently [BPW09,Pralat10,LP]. Many problems remains open as the characterization of the cop-win graphs (graphs in which one cop is always sufficient to capture the robber) in these different variants. In particular, few is known concerning these variants in random graphs or in some particular graph classes (the number of cops required to capture a fast robber in a grid is unknown [NS08]).

The different variants may be investigated in random graphs, or in some particular (deterministic) graph classes (e.g., grid, bounded genus graphs). Classical questions are of interest: upper and lower bounds on the cop number, characterization of graphs with a given cop number, deterministic or random algorithms allowing to compute efficient strategies for the cops/ the robber.

Required background: good knowledge in probability theory, graph theory, algorithmic, optimization, computational complexity

References:
[Alspach04] Brian Alspach, Searching and sweeping graphs: A brief survey. Le Matematiche LIX, pages 5-37, 2004.
http://www.dmi.unict.it/ gquattro/combinatorics04/documenti%20pdf/alspach.pdf
[CCNV] J. Chalopin, V. Chepoi, N. Nisse and Y. Vaxes, Cop and Robber games when the robber can hide and ride
[FGK08] F. V. Fomin, P. Golovach and J. Kratochvil, On tractability of Cops and Robbers game, IFIP

TCS, pages 171-185, 2008
[NS08] N. Nisse and K. Suchan, Fast robber in planar graphs, WG, pages 312-323, 2008
[Pralat10] Pawel Pralat, When does a random graph have constant cop number ? Australian Journal of Combinatorics 46. (2010)
[LP] T. Luczak and P. Pralat, Chasing robbers on random graphs: zigzag theorem (see www.math.wvu.edu/ pralat/)
[BPW09] A. Bonato, P. Pralat and C. Wang, Pursuit-evasion in models of Complex Networks, Internet Mathematics 4, pages 419-436, 2009.

URL : http://www-sop.inria.fr/mascotte//offres/CopsRobber.pdf